球の体積と表面積　－様々な教具を使った楽しい数学－

和歌山県　阪田祐二

１　授業展開を考えるにあたっての留意点

授業展開を考えるにあたっては，次のような点に留意した。

(1) 公式を導く理論的な説明はきっちりとする。特に，積分の考え方に触れる。

(2) 導いた公式が本当に成り立っているかを確かめ，実感できるもの（計測等）を組み込む。

(3) 生徒が興味・関心を持てるように教材の配列を工夫する。

(4) 適切な教具を工夫する。

２　授業展開の方針

「球の体積と表面積」の展開の仕方は，教科書によって様々である。「球の体積」の説明をして，その結果を利用して，「球の表面積」の説明をするものと，逆に，「球の表面積」の説明をして，その結果を利用して，「球の体積」の説明をするものに大きく分かれる。 私は，あえて，どの教科書にもない，「球の体積」と「球の表面積」をそれぞれ別々に説明して，後でそれらの関係を考え結びつけるという授業展開を考えてみた。

３　授業の展開

［１］球の体積

(1) 教具(ｱ)を使って実演をし，次の問を考えて球の体積の公式を予想する。

＜問＞ 円柱の容器に底面と同じ半径の球を入れ，球がちょうどつかるまで水を入れ，球を取り出したところ，水面の高さが３分の１になった。

　このことから，半径 r の球の体積の公式を考えよ。ただし，底面の半径 r，高さ h の円柱の体積は πr^2h で求められることはわかっているものとする。

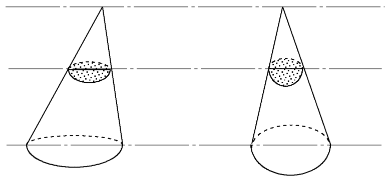
＜教具(ｱ)＞

半径 r の球の体積は，$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

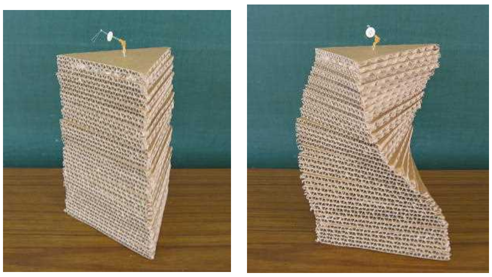
(2) 教具(ｲ)(ｳ)を使って，カヴァリエリの原理を納得させる。積分の考え方に触れさせる。

＜カヴァリエリの原理＞

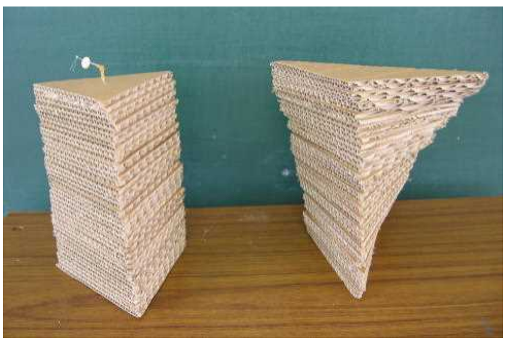
２つの立体を底面と平行な平面で切った断面積が常に等しいとき，２つの立体の体積は等しい。

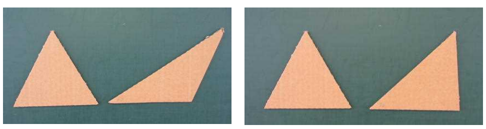


＜教具(ｲ)＞積み方を変えても体積は同じ



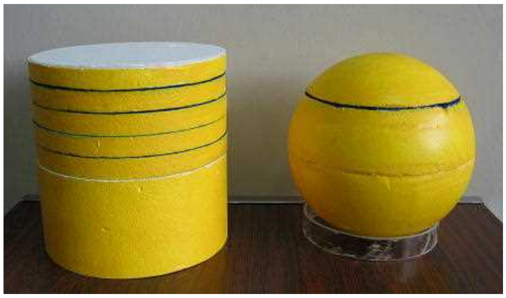
＜教具(ｳ)＞ 底辺と高さが同じの三角形を積み上げているので体積は同じ





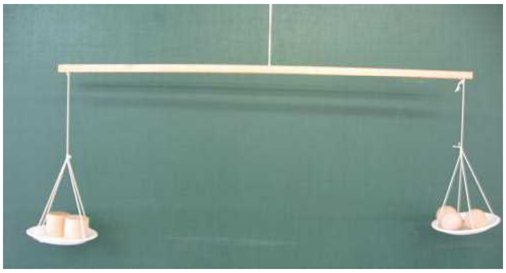
(3) 教具(ｴ)(ｵ)を使って，「球の体積」の説明をする。

＜教具(ｴ)(ｵ)＞

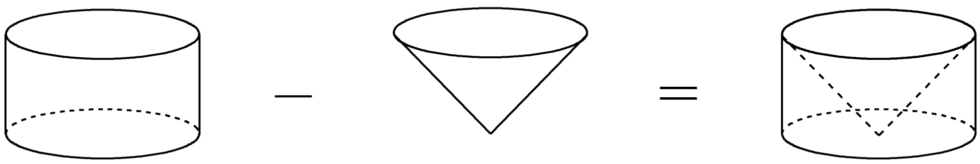


(4) 立体の重さを測ることにより，公式が正しいことを確かめ，実感させる。

半径rの球$\boxed{}$個と底面の半径r高さ$2r$の円柱$\boxed{}$個が釣り合うか？

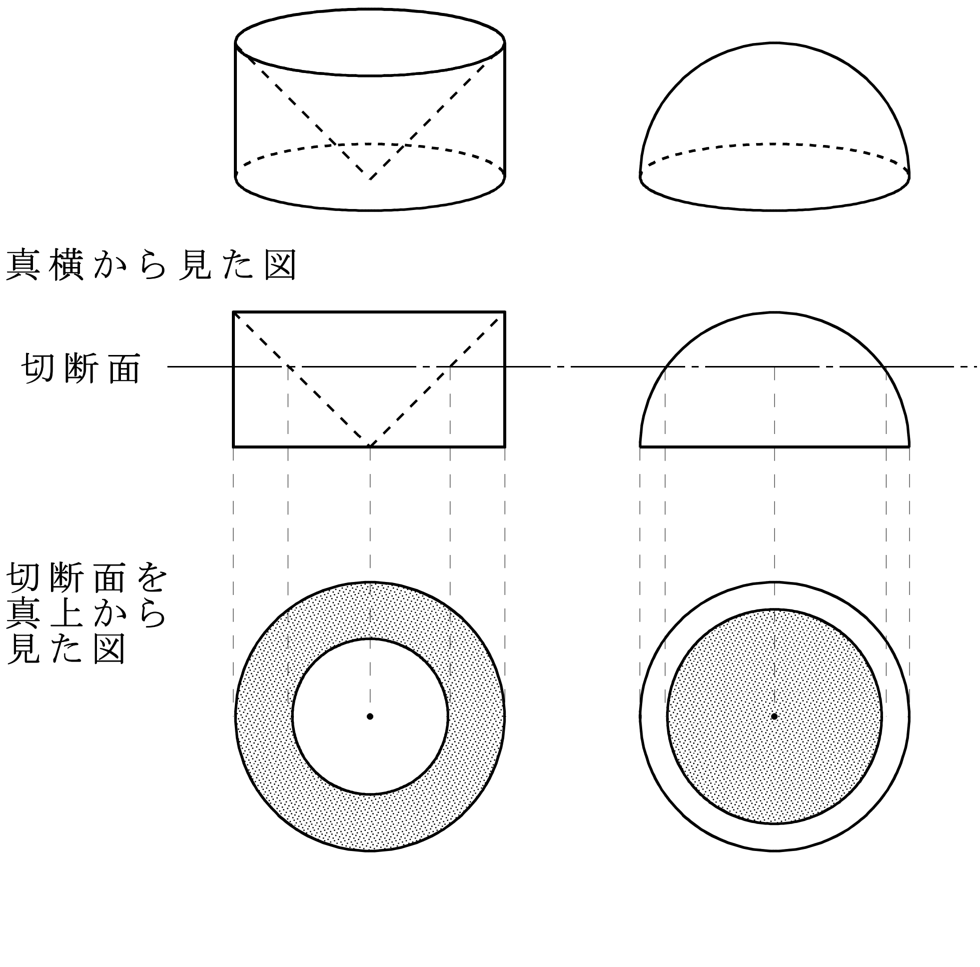


＜球の体積の説明＞



体積は　πr^3　　　体積は$\dfrac{1}{3}\pi r^3$　　　体積は$\dfrac{2}{3}\pi r^3$

次の２つの立体が同じ体積であることをカヴァリエリの原理を使って説明する。

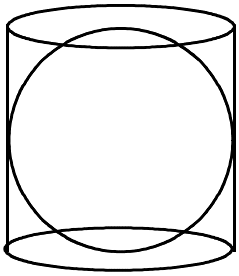


［２］球の表面積

(1) アルキメデスと同じ考えで，球の表面積の公式を導く。

＜問＞ 古代ギリシャの数学者のアルキメデスは，球の表面積と球に外接する円柱の側面積が同じであることを知っていた。

　このことから，半径 r の球の表面積の公式を考えよ。



半径 r の球の表面積は，$S=4\pi r^2$

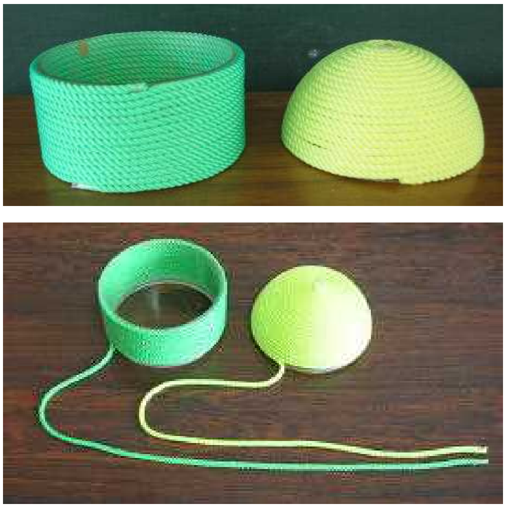
(2) 教具(ｶ)(ｷ)を使って，アルキメデスの発見が正しいことを説明する。

　積分の考え方（細かく分けて，掛けて，集める）に触れさせる。

＜教具(ｶ)(ｷ)＞

(3) ひもを巻いた球面と円錐のひもをほどいて，同じ長さになることを見せ，アルキメデスの発見が正しいことを確かめ，実感させる。

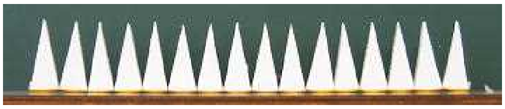
＜教具(ｸ)(ｹ)＞



［３］球の体積と球の表面積の関連

(1) 教具(ｺ)を見せ，円の面積Sと円周lの関係を考えさせる。

＜教具(ｺ)＞



円の面積Sと円周lの関係は

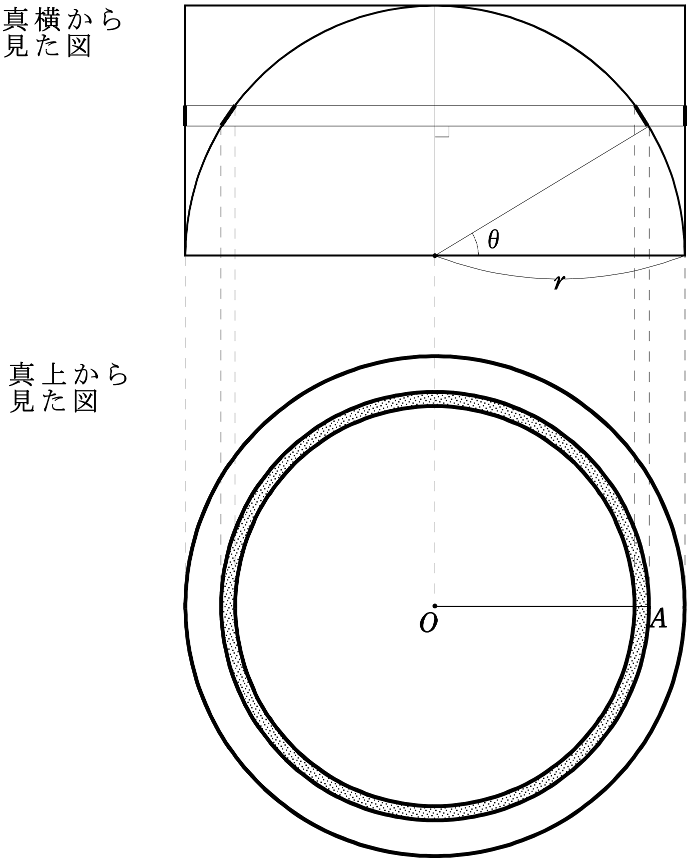
$$S=\frac{1}{2}rl$$

＜球の表面積の説明＞

半径rの球に円柱が外接しているとする。

右図のように球の赤道面から緯度θ付近のところで立体を切断し細い帯を考える。

球面から切り取られた帯の幅を直線とみなしてdとする。



① 円柱から切り取られた帯の幅は，dとθを使って $\boxed{d\cos\theta}$ と表される。

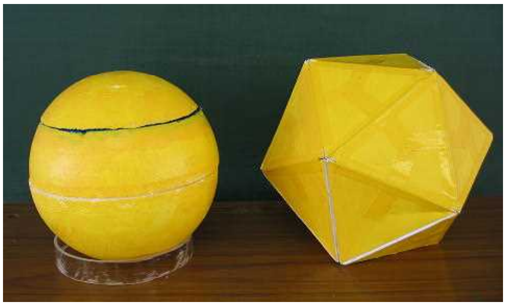
② 円柱から切り取られた帯の長さは，半径rの円周になっているから，$\boxed{2\pi r}$ である。

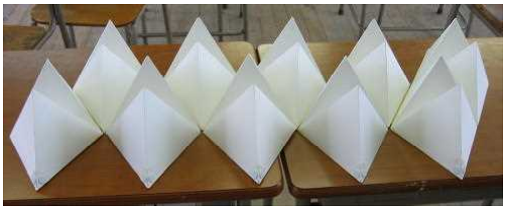
③ 球面から切り取られた帯の長さは，半径OAの円周になっているとみなして，rとθを使って$\boxed{2\pi r\cos\theta}$と表される。

①～③を使って計算すると円柱から切り取られた帯と球面から切り取られた帯の面積はどちらも$\boxed{2\pi dr\cos\theta}$であることがわかる。

(2) 教具(サ)を見せ，球の体積と球の表面積の関係を考えさせる。

＜教具(サ)＞





球の体積 V と球の表面積 S の関係は，

$$V=\frac{1}{3}rS$$

(3) 球の体積の公式と球の表面積の公式が見つけた関係になっていることを確かめる。

(4) 「円の面積と円周」「球の体積と球の表面積」には，次元を越えた同じような関係があり，その裏には微分・積分の関係が潜んでいることに触れる。

4　おわりに

いくつかの研究会でこの「球の体積と表面積」の授業案を発表したところ、多くの先生方に興味を持っていただき、いろいろなアドバイスをいただきました。感謝しています。いろいろ手直しをして、現在のものができあがっています。いよいよ３学期には本番の授業が始まります。単なる知識の伝達ではなく、クラスのみんなが考え、感じあえる、楽しい授業にしていきたいと思っています。みなさんもいろいろな工夫をしてみてください。